JOURNAL OF APPROXIMATION THEORY 16, 301–309 (1976)

Zur linearen einseitigen Tschebyscheff-Approximation

WILHELM FORST

Fachbereich Mathematik der Universität, D-74 Tübingen, West Germany

Communicated by G. G. Lorentz

Received June 26, 1974

Die näherungsweise Lösung gewisser Operatorgleichungen (vgl. [1, p. 17; 7]) führt auf einseitige Approximationsprobleme. Derartige Probleme sind in der Literatur eingehend untersucht worden (vgl. [3, Chap. 3.8; 4, 6]). In dieser Note wollen wir einige ergänzende Betrachtungen anstellen. Der Schwerpunkt liegt auf der Herleitung unterer Schranken für den Approximationsfehler. Bei der Formulierung der Ergebnisse ist nicht größtmögliche Allgemeinheit hinsichtlich ihrer Gültigkeit in Banachverbänden angestrebt.

1

Sei $M \neq \varnothing$ ein kompakter Hausdorffraum, U ein linearer Teilraum des Raumes $C(M)$ der über M stetigen reellwertigen Funktionen sowie $f \in C(M)$. Bezeichnet (bei im weiteren festem f) K^- die Menge $\{g \in C(M) \mid g \leqslant f\}$, so nennen wir $g_0 \in U \cap K^-$ unteres Proximum zu f in U, wenn $|f - g_0| \leqslant |f - g|$ für alle $g \in U \cap K^-$ gilt. Entsprechend definiert man ein oberes Proximum. Als Norm sei dabei die Maximumnorm verwendet. Ein unteres Proximum existiert z.B., falls U endlichdimensional und $U \cap K^- \neq \varnothing$ ist.

Sei nun $g_0 \in U \cap K^-$; zerlegen wir die Menge der Extremalpunkte der Fehlerfunktion $f - g_0$ in $E^+ := \{x \in M \mid f(x) - g_0(x) = |f - g_0|\}$ und $E^- := \{x \in M \mid f(x) - g_0(x) = 0\}$, so gilt in Abwandlung des Kolmogoroff-Kriteriums (vgl. [5, Satz 6.1; 1, Satz 4.4]) die Äquivalenz der folgenden beiden Aussagen:

(1) g_0 ist unteres Proximum zu f in U,

(2) $\min_{x \in E^+}(g(x) - g_0(x)) \leqslant 0$ für alle $g \in U \cap K^-$.

Mit Hilfe eines einfachen Kompaktheitsschlusses folgt aus (1) und (2):

(3) Für alle $g \in U$ gilt $\min_{x \in E^+} g(x) \leqslant 0$ oder $\max_{x \in E^-} g(x) \geqslant 0$.

Diese Aussage ist von Interesse, wenn man für endlichdimensionale Unterräume eine [5, Satz 6.2] entsprechende Charakterisierung des unteren

Proximums beweisen will. Im allgemeinen folgt aber aus (3) nicht (1), wie folgendes Beispiel zeigt.

BEISPIEL 1. Es sei $M = [-1, 1]$, $h(x) = x$ auf M, $U = \operatorname{span}\{h, h^2\}$ und $f = h^3$. $\hat{g} = -h^2$ ist unteres Proximum zu f in U mit $|f - \hat{g}| = 2$. Auch $g_0 = -2h^2$ erfüllt (3), wegen $|f - g_0| = 3$ aber nicht (1).

Im weiteren werden wir jedoch sehen, daß obige Aussagen äquivalent sind, falls U ein Haarscher Raum ist. Dabei brauchen wir uns nicht wie in [6] auf abgeschlossene Intervalle M zu beschränken oder wie in [3] zu fordern, daß U ein $\bar{g}$ mit $\bar{g} < f$ enthält.

Sei nun $\dim U = p < \infty$ und $f \in C(M) \backslash U$. Dann kann man wie üblich zeigen (vgl. [3, Satz 3.8.5]), daß (3) äquivalent ist zu

(4) Es existieren ganze Zahlen k, $m \geqslant 0$ mit $1 \leqslant k + m \leqslant p + 1$, paarweise verschiedene Punkte $x_1, \dots, x_k \in E^+$ und $y_1, \dots, y_m \in E^-$ sowie Skalare $\alpha_1, \dots, \alpha_k, \beta_1, \dots, \beta_m > 0$ mit

$$\sum_{i=1}^{k} \alpha_i + \sum_{j=1}^{m} \beta_j = 1$$

und

$$\sum_{i=1}^{k} \alpha_i g(x_i) - \sum_{j=1}^{m} \beta_j g(y_j) = 0 \qquad \text{für alle} \quad g \in U.$$

Wir nehmen nun an, daß U Haarsch ist. Mit (4) muß dann stets $k + m = p + 1$ gelten. Dies ergibt insbesondere, daß das untere Proximum eindeutig bestimmt ist. Ferner impliziert (1) Aussage (4) mit $k \geqslant 1$, da bei der Anwendung des Satzes von Carathéodory (vgl. [3, Satz 2.7.4, Beweis von Satz 3.8.5]) einer der Punkte aus E^+ beliebig wählbar ist. Umgekehrt folgt stets (1) aus (4), falls $k \geqslant 1$ ist.

Zusammenfassend erhalten wir

SATZ 1. *Sei U ein linearer Teilraum von $C(M)$ mit* $\dim U = p$; *ferner sei U Haarsch, oder U enthalte eine Funktion $\bar{g}$ mit $\bar{g} < f$. Dann gelten die Äquivalenzen* (1) $\Leftrightarrow$ (2) $\Leftrightarrow$ (3) $\Leftrightarrow$ ((4) *mit* $k \geqslant 1$).

2

Im folgenden untersuchen wir die Frage, wie wir mit Hilfe linearer Funktionale den Approximationsfehler $\delta(f, U \cap K^-)$ nach unten abschätzen können. Wir beginnen mit folgendem einfachen Ergebnis:

SATZ 2. *Sei U ein linearer Teilraum von $C(M)$, und es existiere zu $f \in C(M)\backslash\bar{U}$ ein $g \in U \cap K^-$. Dann gilt bei unterer Approximation von f in U die Beziehung*

$$\delta(f, U \cap K^-) \geqslant \sup\{l(f) \mid l \in U^\perp \wedge \mid l_+ \mid \leqslant 1\}. \tag{1}$$

Dabei bezeichnet l_+ gemäß [8, p. 152] den positiven Teil (und l_- den negativen Teil) des Funktionals l aus dem Banachverband $C(M)^*$.

Man kann sofort Fälle nennen, wo in (1) Gleichheit gilt:

SATZ 3. *Hinreichend für*

$$\delta(f, U \cap K^-) = \max\{l(f) \mid l \in U^\perp \wedge \mid l_+ \mid \leqslant 1\}$$

ist jede der folgenden drei Bedingungen:

(i) *U ist endlichdimensional und Haarsch mit $U \cap K^- \neq \varnothing$;*

(ii) *U ist endlichdimensional, und es existiert ein $\bar{g} \in U$ mit $\bar{g} < f$;*

(iii) *U enthält die Konstanten.*

Der Fall (iii) ist trivial, da das einseitige auf das gewöhnliche Approximationsproblem zurückgeführt werden kann. In den Fällen (i) und (ii) gehen wir so vor: Zu f existiert in U ein unteres Proximum g_0. Für dieses gilt nach Satz 1 die Aussage (4) mit $k \geqslant 1$. Definieren wir für $g \in C(M)$

$$l(g) = \left(1 \Big/ \sum_{i=1}^{k} \alpha_i\right)\left(\sum_{i=1}^{k} \alpha_i g(x_i) - \sum_{j=1}^{m} \beta_j g(y_j)\right),$$

so ist $l \in U^\perp$ mit $\mid l_+ \mid = 1$ und $\mid f - g_0 \mid = l(f)$, d.h. l ist ein maximales lineares Funktional.

Mit Hilfe des Dualitätssatzes von Fenchel (vgl. [2, p. 68]) läßt sich allgemeiner folgendes Resultat beweisen:

SATZ 4. *Sei U ein linearer Teilraum von $C(M)$ und $f \in C(M)\backslash\bar{U}$. Existiert in U ein $\bar{g}$ mit $\bar{g} < f$, so gilt*

$$\delta(f, U \cap K^-) = \max\{l(f) \mid l \in U^\perp \wedge \mid l_+ \mid \leqslant 1\}.$$

Zum Beweis definieren wir auf $C(M)$ die konvexen Funktionale φ und $-\gamma$:

$$\begin{aligned} \varphi(g) &:= 0, && \text{falls } g \in U \\ &:= \infty, && \text{sonst,} \\ \gamma(g) &:= -\mid g - f \mid, && \text{falls } g \in K^- \\ &:= -\infty, && \text{sonst.} \end{aligned}$$

Gemäß der Definition in [2, p. 43] erhalten wir

$$\varphi^*(l) = \sup\{l(g) \mid g \in U\} = 0, \qquad \text{falls } l \in U^\perp$$
$$= \infty, \qquad \text{sonst.}$$

Weiter ist nach [2, p. 66]

$$\gamma^+(l) = \inf\{l(g) + |g - f| \mid g \in K^-\}.$$

Für $l \in C(M)^*$ mit $|l_+| \leqslant 1$ gilt $\gamma^+(l) = l(f)$ wegen

$$l(g) + |g - f| \geqslant l(f) - l_+(f - g) + |f - g| \geqslant l(f).$$

Ist aber $|l_+| > 1$, dann existiert zu $\epsilon > 0$ mit $\epsilon < |l_+| - 1$ wegen

$$|l_+| = \sup\{l(p) \mid 0 \leqslant p \leqslant 1\}$$

eine Funktion $p_0 \in C(M)$ mit $0 \leqslant p_0 \leqslant 1$ und $|l_+| - l(p_0) < \epsilon$. Für $\alpha \geqslant 0$ gehört $g := f - \alpha p_0$ zu K^-. Wir erhalten so

$$\begin{aligned} l(g) + |f - g| &= l(f) - \alpha(l(p_0) - |p_0|) \\ &\leqslant l(f) - \alpha(|l_+| - 1 - \epsilon) \to -\infty \qquad (\alpha \to \infty) \end{aligned}$$

und somit $\gamma^+(l) = -\infty$. Weiter enthält $K^- \bar{g} \in U$ als inneren Punkt. Insgesamt sind damit die Voraussetzungen des Dualitätssatzes von Fenchel erfüllt, und wir erhalten

$$\begin{aligned} \delta(f, U \cap K^-) &= \inf_{g \in C(M)} (\varphi - \gamma)(g) \\ &= \max_{l \in C(M)^*} (\gamma^+ - \varphi^*)(l) \\ &= \max\{l(f) \mid l \in U^\perp \wedge |l_+| \leqslant 1\}. \end{aligned}$$

3

Ergänzend sei bemerkt, daß die Voraussetzung "$\operatorname{int}(K^-) \cap U \neq \varnothing$" in Satz 4 nicht ohne weiteres weggelassen werden kann. Sonst bestehen z.B. folgende Möglichkeiten: Es gilt nur

$$\delta(f, U \cap K^-) = \sup\{l(f) \mid l \in U^\perp \wedge |l_+| \leqslant 1\},$$

d.h. es existiert kein maximales Funktional, oder sogar

$$\delta(f, U \cap K^-) > \max\{l(f) \mid l \in U^\perp \wedge |l_+| \leqslant 1\},$$

d.h. das Maximum existiert, ist aber zu klein. Dazu zwei Beispiele:

BEISPIEL 2. Wir knüpfen an Beispiel 1 an. Dort galt $\delta(f, U \cap K^-) = 2$. Wir zeigen, daß es kein maximales Funktional $l \in U^\perp$ mit $|l_+| = 1$ und und $l(f) = 2$ gibt.

Zum Beweis denken wir uns durch

$$l(g) = \int_{-1}^{1} g(t)\, d\varphi(t) \qquad \text{für} \quad g \in C[-1, 1]$$

ein Funktional $l \in C[-1, 1]^*$ gegeben. Die Belegung φ habe die Darstellung $\varphi = \varphi_+ - \varphi_-$ als Differenz ihrer monotonen Teile φ_+ und φ_-. Es sei

$$|l_+| = \int_{-1}^{1} |d\varphi_+| = 1$$

vorausgesetzt. Wir brauchen dann nur folgendes zu zeigen: Gilt

$$\int_{-1}^{1} t^2\, d\varphi(t) = 0 \qquad \text{und} \qquad \int_{-1}^{1} t^3\, d\varphi(t) = 2, \tag{2}$$

so hat l mit geeignetem Gewicht $\alpha \geqslant 0$ die Gestalt

$$l(g) = -g(-1) - \alpha g(0) + g(1) \qquad \text{für} \quad g \in C[-1, 1]. \tag{3}$$

Daraus folgt nämlich sofort, daß für alle Funktionale $l \in U^\perp$ mit $|l_+| \leqslant 1$ $l(f) < 2$ ist.

Zum Nachweis von (3) definieren wir

$$G(x) := \int_{x}^{1} t^2\, d\varphi(t).$$

Wegen (2) gilt $G(-1) = G(1) = 0$, und so ergibt partielle Integration

$$2 = \int_{-1}^{1} t^3\, d\varphi(t) = \int_{-1}^{1} G(t)\, dt; \tag{4}$$

wegen (4) und

$$G(x) \leqslant \int_{x}^{1} t^2\, d\varphi_+(t) \leqslant \int_{-1}^{1} |d\varphi_+| = 1$$

erhalten wir für fast alle $x \in [-1, 1]$ die Beziehungen

$$G(x) = \int_{x}^{1} t^2\, d\varphi_+(t) = \int_{-1}^{1} |d\varphi_+| = 1 \tag{5}$$

und

$$\int_{x}^{1} t^2\, d\varphi_-(t) = 0. \tag{6}$$

Aus (5) folgt, daß φ_+ bei 1 eine Sprungstelle mit Sprunghöhe 1 hat und sonst konstant ist. Entsprechend ergibt (6), daß φ_- höchstens Sprungstellen bei -1 und 0 haben kann und sonst konstant ist. Ferner müssen wegen (2) die Sprunghöhen von φ_+ bei 1 und von φ_- bei -1 gleich sein.

Wenn auch kein maximales Funktional existiert, so ist in diesem Falle doch

$$\sup\{l(f) \mid l \in U^\perp \wedge | l_+ | \leqslant 1\} = 2, \tag{7}$$

denn für das zu vorgegebenem $\epsilon > 0$ durch

$$l(g) = -\frac{1-\epsilon}{1+\epsilon}\, g(-1) - \frac{2}{\epsilon(1+\epsilon)}\, g(\epsilon) + g(1) \qquad \text{für} \quad g \in C[-1, 1]$$

definierte Funktional l gilt $l \in U^\perp$, $| l_+ | = 1$ und $l(f) = 2(1 - \epsilon)$.

Beispiel 3. Beispiel 2 ändern wir nun ab, indem wir bezüglich des unendlichdimensionalen Unterraums

$$U := \operatorname{span}\{h, h^2, h^4, h^6, \ldots\}$$

approximieren. Auch in diesem Falle ist $g_0 = -h^2$ nach Kriterium (2) ein unteres Proximum zu f in U mit $\delta(f, U \cap K^-) = 2$. Sein nun $l \in U^\perp$ mit der Darstellung

$$l(g) = \int_{-1}^{1} g(t)\, d\varphi(t) \qquad \text{für} \quad g \in C[-1, 1]$$

betrachtet. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit dürfen wir annehmen, daß die Belegung φ in 0 stetig ist und für alle $t \in (-1, 1)$ $\varphi(t) = \frac{1}{2}(\varphi(t + 0) + \varphi(t - 0))$ gilt. Wegen

$$l(h^{2k}) = 0 \qquad (k = 1, 2, \ldots)$$

ist dann für alle geraden Funktionen $g \in C[-1, 1]$

$$0 = l(g) = \int_0^1 g(t)\, d(\varphi(t) - \varphi(-t)),$$

und somit gilt

$$\varphi(t) - \varphi(-t) = 0 \qquad \text{für} \quad t \in [0, 1].$$

Beachten wir nun die Beziehungen

$$\int_{-1}^{1} t^{2k+1}\, d\varphi(t) = 2 \int_0^1 t^{2k+1}\, d\varphi(t)$$

und

$$\int_{-1}^{1} | d\varphi_+ | = \int_0^1 | d\varphi |,$$

so folgt

$$\max\{l(f) \mid l \in U^\perp \wedge |l_+| \leqslant 1\}$$

$$= 2 \max \left\{ \int_0^1 t^3 \, d\varphi(t) \,\middle|\, \varphi \in BV[0, 1] \wedge \int_0^1 t \, d\varphi(t) = 0 \wedge \int_0^1 |d\varphi| \leqslant 1 \right\}$$

$$= 2\delta(f|_{[0,1]}, \operatorname{span}\{h\}) = \tfrac{1}{2}.$$

Damit haben wir

$$\max\{l(f) \mid l \in U^\perp \wedge |l_+| \leqslant 1\} = \tfrac{1}{2} < \delta(f, U \cap K^-) = 2$$

gezeigt.

4

In diesem letzten Abschnitt gehen wir nun auf eine quantitative Beziehung zwischen gewöhnlicher und einseitiger Tschebyscheff-Approximation ein.

SATZ 5. *Ist U ein linearer Teilraum von $C(M)$ und $f \in C(M)\backslash\overline{U}$, so gilt*

$$\frac{1}{\delta(f, U)} \geqslant \frac{1}{\delta(f, U \cap K^-)} + \frac{1}{\delta(f, U \cap K^+)}, \tag{8}$$

d.h. die Hälfte des harmonischen Mittels von $\delta(f, U \cap K^-)$ und $\delta(f, U \cap K^+)$ ist eine obere Schranke für $\delta(f, U)$.

Dabei bedeutet K^+ analog K^- die Menge $\{g \in C(M) \mid g \geqslant f\}$.

Interessant ist nur der Fall $U \cap K^- \neq \varnothing$, $U \cap K^+ \neq \varnothing$. Nach Satz 2 ist dann

$$\frac{1}{\delta(f, U \cap K^-)} + \frac{1}{\delta(f, U \cap K^+)}$$

$$\leqslant \inf \left\{ \frac{|l_+|}{l(f)} \,\middle|\, l(f) > 0 \wedge l \in U^\perp \right\} + \inf \left\{ \frac{|l_-|}{l(f)} \,\middle|\, l(f) > 0 \wedge l \in U^\perp \right\}$$

$$\leqslant \inf \left\{ \frac{|l_+| + |l_-|}{l(f)} \,\middle|\, l(f) > 0 \wedge l \in U^\perp \right\}.$$

Mit $|l| = |l_+| + |l_-|$ folgt daraus die Behauptung.

ZUSATZ. *In folgenden Fällen gilt in* (8) *Gleichheit*:

(i) *U enthält die Konstanten*;

(ii) *U ist ein Haarscher Unterraum mit* $\dim U = p$ *und* $\operatorname{card} M = p + 1$.

In (8) kann $\delta(f, U)$ nicht beliebig stark überschätzt werden, falls U eine positive Funktion p enthält. Für diese gelte

$$0 < p_0 \leqslant p(x) \leqslant 1 \qquad \text{für} \quad x \in M,$$

wobei p_0 eine positive Konstante bedeutet. Betrachten wir ein Funktional $l \in U^\perp$, so gilt $l(p) = 0$ und damit $l_+(p) = l_-(p)$. Dies liefert

$$| l_+ | = l_+(1) \geqslant l_+(p) = l_-(p) \geqslant p_0 l_-(1) = p_0 | l_- |$$

und

$$| l_- | \geqslant p_0 | l_+ |;$$

mit

$$| l_+ | + | l_- | = | l |$$

folgt dann

$$| l_+ | \geqslant \frac{p_0}{1 + p_0} | l |, \qquad | l_- | \geqslant \frac{p_0}{1 + p_0} | l |. \tag{9}$$

Nach Satz 4 und (9) erhalten wir

$$\begin{aligned} &\frac{1}{\delta(f, U \cap K^-)} + \frac{1}{\delta(f, U \cap K^+)} \\ &\quad = \min \left\{ \frac{| l_+ |}{l(f)} \,\middle|\, l \in U^\perp \wedge l(f) > 0 \right\} + \min \left\{ \frac{| l_- |}{l(f)} \,\middle|\, l \in U^\perp \wedge l(f) > 0 \right\} \\ &\quad \geqslant \frac{2p_0}{1 + p_0} \min \left\{ \frac{| l |}{l(f)} \,\middle|\, l \in U^\perp \wedge l(f) > 0 \right\} = \frac{2p_0}{1 + p_0} \frac{1}{\delta(f, U)}. \end{aligned} \tag{10}$$

Abschließend demonstrieren wir noch, daß in der Abschätzung (10) nichts verschenkt worden ist.

BEISPIEL 4. Es sei $0 < \eta < \epsilon < 1$, $M = [-1, 1]$, $U = \operatorname{span}\{g\}$ mit $g(x) = (1 + \epsilon - | x |)/(1 + \epsilon)$ für $x \in M$ und

$$\begin{aligned} f(x) &= -1, && \text{falls } -1 \leqslant x \leqslant -\eta \\ &= x/\eta, && \text{falls } | x | \leqslant \eta \\ &= 1, && \text{falls } \eta \leqslant x \leqslant 1. \end{aligned}$$

Wegen $\delta(f, U) = 1$, $\delta(f, U \cap K^-) = \delta(f, U \cap K^+) = (1 + 2\epsilon - \eta)/\epsilon$ und $p_0 = \epsilon/(1 + \epsilon)$ gilt dann

$$\frac{1}{\delta(f, U \cap K^-)} + \frac{1}{\delta(f, U \cap K^+)} = \frac{1 + 2\epsilon}{1 + 2\epsilon - \eta} \left(\frac{2p_0}{1 + p_0} \frac{1}{\delta(f, U)} \right).$$

LITERATUR

1. L. COLLATZ UND W. KRABS, "Approximationstheorie," Teubner, Stuttgart, 1973.
2. R. B. HOLMES, "A Course on Optimization and Best Approximation," Springer–Verlag, Berlin–Heidelberg–New York, 1972.
3. P. J. LAURENT, "Approximation et Optimisation," Hermann, Paris, 1972.
4. J. R. RICE, Approximation with convex constraints, *SIAM J. Appl. Math.* **11** (1963), 15–32.
5. A. SCHÖNHAGE, "Approximationstheorie," de Gruyter, Berlin–New York, 1971.
6. G. D. TAYLOR, Approximation by functions having restricted ranges, *J. Math. Anal. Appl.* **27** (1969), 241–248.
7. G. A. WATSON, One-sided approximation and operator equations, *J. Inst. Math. Appl.* **12** (1973), 197–208.
8. B. S. WULICH, "Einführung in die Funktionalanalysis," Teil 2, Teubner, Leipzig, 1962.